Capítulo 6

Geometría euclídea plana

6.1 La geometría del triángulo

En esta sección vamos a establecer los resultados básicos mínimos para desarrollar los temas de las próximas secciones, junto con su terminología y convenciones. Cuando se necesite se usará un sistema de referencia métrico fijado de antemano.

Terminología.- Dado un triángulo ABC se llaman lados a las rectas AB, AC, BC, o bien a los segmentos $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$, o bien a las longitudes de estos segmentos, que se designarán con los mismos símbolos que los propios segmentos, o en la forma siguiente: $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB}$. Se notará r_{AB} a la semirrecta de origen A que contiene a B. Se llaman ángulos del triángulo a

$$\widehat{A} = (\widehat{r_{AB}, r_{AC}}), \widehat{B} = (\widehat{r_{BA}, r_{BC}}), \widehat{C} = (\widehat{r_{CA}, r_{CB}}),$$

y a sus medidas se las designará también por $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$. Se llaman alturas del triángulo, bien a las perpendiculares por cada vértice al lado opuesto, bien a los segmentos de extremos cada vértice y el pie de la perpendicular, bien a sus longitudes. Se llaman medianas del triángulo a las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto, o bien a los segmentos correspondientes. Se llaman mediatrices del triángulo a las de sus lados.

Teorema 6.1.1.– Teorema del coseno. *En un triángulo ABC se verifica:*

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \widehat{A} \\ \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \widehat{B} \\ \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \widehat{C}. \end{aligned}$$

Demostración: Basta probar la primera. Se tiene

$$\overline{BC}^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

$$= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \widehat{A}.$$

Nótese que, como caso particular, se tiene el llamado teorema de Pitágoras:
Si $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ es $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Proposición 6.1.2.– *En un triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.*

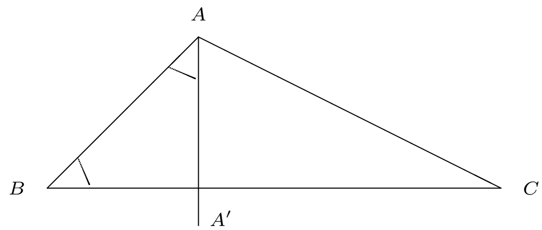


Figura 6.1: Angulos y lados

Demostración: Obsérvese que, si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ son vectores unitarios, es $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$. Se tiene

$$\cos\widehat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} \quad , \quad \cos\widehat{C} = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|},$$

luego

$$\cos\widehat{C} - \cos\widehat{B} = \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right).$$

Así,

$$\cos\widehat{C} - \cos\widehat{B} = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right) \perp \overrightarrow{BC} \Longleftrightarrow$$

$$\exists\lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} - \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\lambda = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \Longleftrightarrow \overline{AC} = \overline{AB}.$$

Esto prueba el resultado.

Proposición 6.1.3.– *En un triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado y viceversa (ver figura 6.1).*

Demostración: Basta probar el primer aserto. Sea $\widehat{A} > \widehat{B}$; existe un rayo interior t a la región angular $[r_{AB} \cup r_{AC}]$ tal que $(\widehat{r_{AB}, t}) = \widehat{B}$. Dicho rayo corta a $\overline{BC}$ en un punto A' y, en el triángulo $AA'B$, es $\overline{A'A} = \overline{A'B}$. Entonces

$$\overline{BC} = \overline{BA'} + \overline{A'C} = \overline{AA'} + \overline{A'C} > \overline{AC}.$$

Esto prueba la proposición.

Notas 6.1.4.– Antes de estudiar la igualdad de triángulos recordemos que la imagen de una semirrecta mediante un movimiento es otra semirrecta, transformándose origen en origen. Vamos a profundizar un poco más en la acción de los movimientos sobre las semirrectas.

6.1.4.1. Dadas dos semirrectas, existe al menos un movimiento que lleva una sobre la otra, pues basta considerar la traslación que lleva el origen de una sobre el de la otra, seguida del giro de centro el origen común y ángulo el que forman ambas después de la traslación.

6.1.4.2. Hay exactamente dos movimientos que dejan invariante una semirrecta dada: la identidad y la simetría de eje la recta que la contiene. En efecto, sea r_1 una semirrecta de origen A, r la recta que la contiene, $f \in \mathrm{Mo}(X)$ tal que $f(r_1) = r_1$. Entonces $f(A) = A$ y $f(r) = r$. Así, si f es directo debe ser la identidad (pues la simetría de centro A intercambia r_1 y su opuesta). Si f es inverso, es necesariamente la simetría de eje r pues la de eje perpendicular a r intercambia r_1 con su opuesta.

6.1.4.3. Dadas dos semirrectas, existen exactamente dos movimientos que transforman una en otra, uno directo y el otro inverso.

En efecto, sean r_1, r_1' dos semirrectas, r, r' las rectas que las contienen, σ, σ' las simetrías de ejes respectivos r, r'. Sean $f, g \in \mathrm{Mo}(X)$ tales que $f(r_1) = g(r_1) = r_1'$. Entonces $g^{-1}f$ deja invariante a r_1, luego $g^{-1}f = \mathrm{id}_X$ ó $g^{-1}f = \sigma$ y así $g = f$ ó $g = f\sigma$, lo que prueba el enunciado. Nótese que, por lo anterior, $g = \sigma' f$.

Definición 6.1.5.– *Se dice que dos triángulos son iguales si existe un movimiento que lleva uno en otro.*

Vamos a estudiar ahora los casos clásicos de igualdad de triángulos.

Teorema 6.1.6.– *Sean $ABC, A'B'C'$ dos triángulos; las condiciones siguientes son equivalentes:*

a). $\exists f \in \mathrm{Mo(X)}$ tal que $f(ABC) = A'B'C'$.

b). ABC y $A'B'C'$ tienen iguales las longitudes de dos lados y el ángulo comprendido.

c). ABC y $A'B'C'$ tienen igual la longitud de un lado y los ángulos adyacentes.

d). ABC y $A'B'C'$ tienen iguales las longitudes de los tres lados.

Demostración: Es claro que la primera condición implica las otras tres; veamos el recíproco.
b) $\Rightarrow$ a) .
Supongamos que $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ y $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Uno de los dos movimientos que lleva r_{CA} sobre $r_{C'A'}$ debe llevar B sobre el mismo semiplano de borde $A'C'$ que contiene a B'. Entonces r_{CB} va sobre $r_{C'B'}$ por igualdad de ángulos, B sobre B' y A sobre A'.
c) $\Rightarrow$ a) .
Si, ahora, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$, se toma el movimiento f tal que $f(r_{CA}) = r_{C'A'}$ y $f(B)$ está en el mismo semiplano de borde $A'C'$ que B'. La igualdad de lados implica que $f(A) = A'$ y la de ángulos que $f(r_{CB}) = r_{C'B'}$, $f(r_{AB}) = r_{A'B'}$ luego $f(B) = B'$.
d) $\Rightarrow$ a) .
Por el teorema del coseno es $\widehat{C} = \widehat{C'}$ y estamos en uno de los casos anteriores. Esto prueba el teorema.

Estudiamos a continuación la suma de los ángulos de un triángulo.

Lema 6.1.7.– *Sean r, s dos rectas paralelas distintas, t una recta secante a ambas, $A = t \cap r$, $B = t \cap s$, r_0, s_0 las dos semirrectas de r, s contenidas en el mismo semiplano de borde t, r_1, s_1 las opuestas. Se verifica que*

$$(\widehat{r_1, r_{AB}}) = (\widehat{r_{BA}, s_0})$$

y estos ángulos se llaman alternos internos*, por respetar la terminología clásica (ver figura* 6.2*).*

Demostración: Sea σ la simetría de centro el punto medio O de $\overline{AB}$; entonces $\sigma(A) = B, \sigma(B) = A$, luego $\sigma(r_{AB}) = r_{BA}$. Como $\overrightarrow{\sigma} = -\mathrm{id}_V$, es $\sigma(r) = s, \sigma(s) = r$. Como O es el punto medio de $\overline{P\sigma(P)}, P \in r_1$, es $\sigma(P) \in s_0$, luego $\sigma(r_1) = s_0, \sigma(r_0) = s_1$, y así la conclusión es obvia.

Teorema 6.1.8.– *La suma de los ángulos de un triángulo ABC es π (ver figura* 6.3*).*

Demostración: Sean $P = A - \overrightarrow{BC}$, $Q = A + \overrightarrow{BC}$. Entonces

$$(\widehat{r_{AP}, r_{AB}}) = (\widehat{r_{BA}, r_{BC}}) = \widehat{B}$$

por alternos internos. Y análogamente,

$$(\widehat{r_{AQ}, r_{AC}}) = (\widehat{r_{CA}, r_{CB}}) = \widehat{C}$$

por alternos internos. De aquí se deduce que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

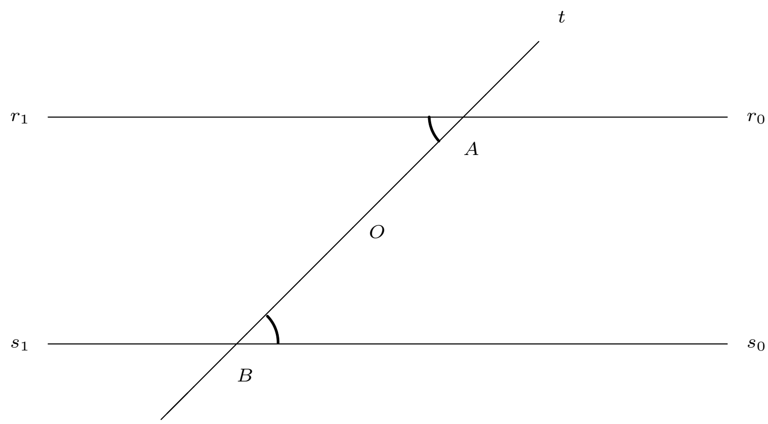


Figura 6.2: Ángulos alternos internos

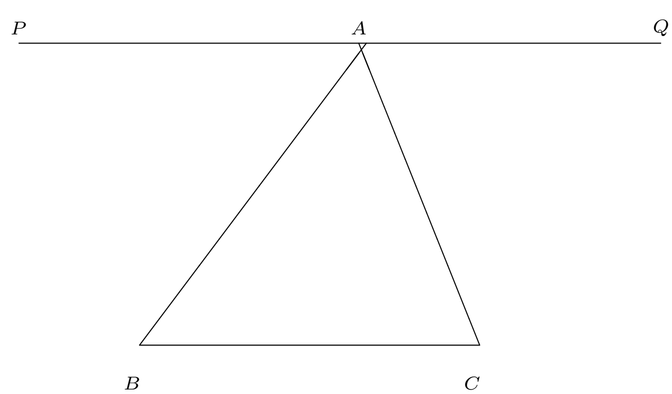


Figura 6.3: Suma de los ángulos de un triángulo

6.2 Circunferencias

Definición 6.2.1.– *Una circunferencia de radio $r \in \mathbb{R}^+$ y centro un punto C es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a C es r.*

Respecto de un sistema de referencia métrico, si $C = (c_1, c_2)$, la ecuación de la circunferencia será

$$\mathcal{C} : (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2.$$

Proposición 6.2.2.– *(*Posiciones relativas de una circunferencia y una recta*)* *Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y t una recta. Se verifica una de las siguientes posibilidades:*

1. *$t \cap \mathcal{C} = \emptyset$ y en este caso se dice que la recta es exterior a la circunferencia.*
2. *$t \cap \mathcal{C} = \{P\}$ y en este caso se dice que la recta es tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.*
3. *$t \cap \mathcal{C} = \{P_1, P_2\}$ con $P_1 \neq P_2$ y en este caso se dice que t es secante a $\mathcal{C}$.*

Además, si $P \in \mathcal{C}$ y t es una recta que pasa por P, entonces:

$$t \text{ es tangente a } \mathcal{C} \text{ en } P \iff t \perp \vec{CP}$$

siendo C el centro de la circunferencia.

Demostración: Tomamos un sistema de referencia donde $C = (0, 0)$ por lo que

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = r^2.$$

Supongamos que t es una recta arbitraria, $A = (a_1, a_2)$ un punto de t y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ un vector director de t. Las ecuaciones paramétricas de t serán

$$t : \begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \end{cases}$$

Para calcular $t \cap \mathcal{C}$ hay que resolver la ecuación

$$(a_1 + \lambda v_1)^2 + (a_2 + \lambda v_2)^2 = r^2;$$

$$\lambda^2(v_1^2 + v_2^2) + \lambda 2(v_1 a_1 + v_2 a_2) + a_1^2 + a_2^2 - r^2 = 0.$$

Llamando $a = v_1^2 + v_2^2$, $b = 2(v_1 a_1 + v_2 a_2)$ y $c = a_1^2 + a_2^2 - r^2$, se tiene que $a \neq 0$ pues $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, luego la ecuación anterior puede:

1. No tener solución si $b^2 - 4ac < 0$.
2. Tener una única solución si $b^2 - 4ac = 0$.
3. Tener dos soluciones si $b^2 - 4ac > 0$.

Supongamos $P = A \in \mathcal{C}$ entonces $a_1^2 + a_2^2 = r^2$. La intersección de t y $\mathcal{C}$ se obtiene de la ecuación

$$\lambda(\lambda(v_1^2 + v_2^2) + 2(v_1 a_1 + v_2 a_2)) = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda = 0$ y $\lambda = -2\frac{v_1 a_1 + v_2 a_2}{v_1^2 + v_2^2}$. La solución será única si y sólo si $v_1 a_1 + v_2 a_2 = 0$. Equivalentemente, si $\vec{v} \perp \vec{CP} = \vec{OA}$.

Proposición 6.2.3.– *(*Arco capaz*) Sean A, B y C tres puntos distintos de una circunferencia de centro un punto D. Denotemos*

$$\begin{array}{l} \hat{A} = \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) \\ \hat{A}' = \angle(\vec{DB}, \vec{DC}). \end{array}$$

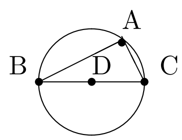
Entonces:
Si A y D están en un mismo semiplano determinado por $\overline{BC}$, $\hat{A}' = 2\hat{A}$.

En otro caso, $\hat{A}' = 2\pi - 2\hat{A}$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos primero que A y D están en un mismo semiplano determinado por $\overline{BC}$.

Empecemos estudiando el caso en que $\overline{BC}$ sea un diámetro. Tenemos que probar que $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$.



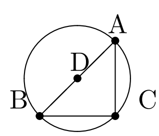
Los triángulos ABD y ADC son isósceles. Si denotamos α y β a los ángulos respectivos en A, se tendrá $\hat{A} = \alpha + \beta$. Usando que la suma de los ángulos de un triángulo es π, llegamos a

$$2\alpha + 2\beta + \pi = 2\pi,$$

luego $2(\alpha + \beta) = \pi$. Por tanto, $\hat{A} = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

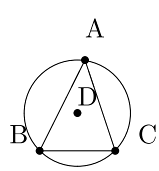
Si $\overline{BC}$ no es un diámetro, distinguiremos casos según D esté en el interior de ABC o no.

En el caso límite en que D esté en el lado $\overline{AB}$ ó $\overline{AC}$, por ejemplo en $\overline{AB}$ (análogamente se razonaría si está en $\overline{AC}$):



El triángulo ADC es isósceles, luego en D el ángulo será $\pi - 2\hat{A}$. Por tanto, $\hat{A}' = 2\hat{A}$.

Si suponemos D interior al triángulo ABC:



Podemos denotar $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ a los ángulos del triángulo ABC. Se tiene que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi.$$

Formamos tres triángulos isósceles al unir D con los puntos A, B y C. Denotemos α, β y γ a sus ángulos en estos puntos. Concretamente suponemos $\hat{A} = \gamma + \beta$, $\hat{B} = \gamma + \alpha$ y $\hat{C} = \alpha + \beta$.

Podemos denotar $\hat{A}'$, $\hat{B}'$ y $\hat{C}'$ a los ángulos de estos triángulos isósceles en el punto D. Se verifica que

$$\hat{A}' + 2\alpha = \pi, \hat{B}' + 2\beta = \pi, \hat{C}' + 2\gamma = \pi,$$

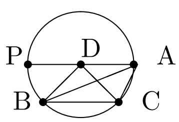
y que

$$\hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 2\pi.$$

De donde

$$\hat{A}' = 2\pi - \hat{B}' - \hat{C}' = 2\pi - (\pi - 2\beta) - (\pi - 2\gamma) = 2(\beta + \gamma) = 2\hat{A}.$$

Si suponemos D exterior al triángulo ABC:



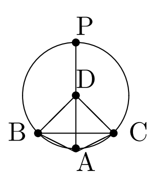
Sea P el punto de intersección del diámetro $\langle A, D\rangle$ con la circunferencia, $P \neq A$.

El triángulo ADC es isósceles, si llamamos α al ángulo en A, $2\alpha = \angle(\vec{DP}, \vec{DC})$.

El triángulo ADB es isósceles, si llamamos β al ángulo en A, $\beta + \hat{A} = \alpha$ y $2\beta = \angle(\vec{DP}, \vec{DB})$. Por tanto,

$$\hat{A}' = \angle(\vec{DP}, \vec{DC}) - \angle(\vec{DP}, \vec{DB}) = 2\alpha - 2\beta = 2(\alpha - \beta) = 2\hat{A}.$$

Supongamos para acabar que A y D están en distintos semiplanos determinados por $\overline{BC}$. Sea P el punto de intersección del diámetro $\langle A, D\rangle$ con la circunferencia, $P \neq A$.



El triángulo ADB es isósceles, si α es el ángulo en A, se tiene que $\angle(\vec{DP}, \vec{DB}) = 2\alpha$.

El triángulo ADC es isósceles, si β es el ángulo en A, se tiene $\angle(\vec{DP}, \vec{DC}) = 2\beta$.

Por tanto,

$$\hat{A}' = 2\pi - \angle(\vec{DP}, \vec{DB}) - \angle(\vec{DP}, \vec{DC}) = 2\pi - 2\alpha - 2\beta = 2\pi - 2(\alpha + \beta) = 2\pi - 2\hat{A}.$$

6.3 Elementos notables de un triángulo

El siguiente paso en el estudio de la Geometría del triángulo es describir los llamados puntos notables: baricentro, circuncentro, ortocentro e incentro. Dado un triángulo ABC, hay una única circunferencia Γ que pasa por los tres puntos A, B, C. Dicha circunferencia se dice que está circunscrita al triángulo, y su centro D es el punto de intersección de las tres mediatrices de los lados de ABC. Al punto D se le suele llamar clásicamente el *circuncentro* del triángulo ABC.

Proposición 6.3.1.– *Si ABC es un triángulo, existe un único punto G del plano, tal que*

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

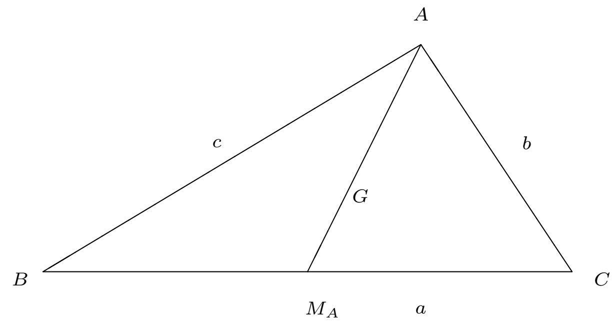


Figura 6.4: Baricentro de un Triángulo

Demostración: Si O es el origen de coordenadas, se tiene:

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} \quad , \quad \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} \quad , \quad \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC}$$

y, sumando las tres igualdades, resulta:

$$\overrightarrow{0} = 3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad \text{de donde} \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

y de aquí se obtiene el único punto $G = O + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Proposición 6.3.2.– *Si M_A es el punto medio del lado BC, se verifica:*

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM_A}$$

y lo mismo para los otros lados.

Demostración: Por la proposición anterior se tiene:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

y entonces:

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GM_A} + \overrightarrow{M_AB} + \overrightarrow{GM_A} + \overrightarrow{M_AC} = 2\overrightarrow{GM_A}$$

Esto prueba que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_A}$ y así, G está sobre la mediana AM_A. Análogamente sucede para las otras medianas, luego el punto G es el punto en el que se cortan las medianas y se llama *baricentro* del triángulo. Por otra parte, usando coordenadas cartesianas, si $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), C = (c_1, c_2)$, las coordenadas cartesianas de G son:

$$G = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right).$$

Proposición 6.3.3.– *Las alturas de un triángulo ABC concurren en un punto llamado ortocentro.*

Demostración: Si por cada vértice se traza la paralela al lado opuesto, se obtiene un nuevo triángulo $A'B'C'$, y los vértices del primero son los puntos medios de los lados del segundo pues, por el teorema de las partes de paralelas comprendidas entre paralelas, se tiene, por ejemplo,

$$\overline{AC'} = \overline{BC} = \overline{AB'}.$$

Así las alturas de ABC son las mediatrices de $A'B'C'$, que concurren en el punto H.

Corolario 6.3.4.– Recta de Euler. *En un triángulo, el baricentro, el ortocentro y el circuncentro están alineados.*

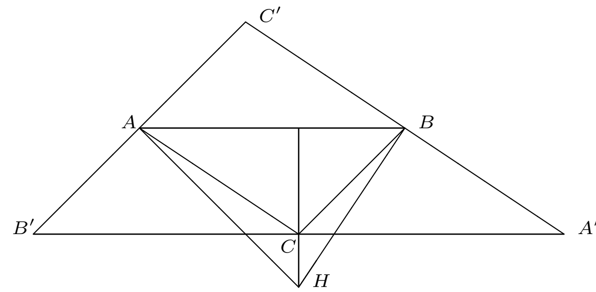


Figura 6.5: Ortocentro

DEMOSTRACIÓN: Sea D el circuncentro, H el ortocentro y G el baricentro de ABC, y tracemos las paralelas a cada lado por el vértice opuesto, como en la proposición anterior. Los baricentros de ABC y $A'B'C'$ coinciden. Por consiguiente, la homotecia de centro G y razón -2 transforma A en A', B en B' y C en C'. Como circuncentro se transforma en circuncentro por esta homotecia, el circuncentro de ABC va sobre el ortocentro. De ahí el resultado. Nótese que $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GD}$.

Proposición 6.3.5.– *En un triángulo ABC los simétricos del ortocentro respecto de cada uno de los lados están sobre la circunferencia circunscrita.*

DEMOSTRACIÓN: Sea D el circuncentro, H el ortocentro y G el baricentro. Sea A' el pie de la altura que pasa por A, A'' la intersección ulterior de esta altura con la circunferencia circunscrita, y A_1 el punto medio de $\overline{BC}$. Si h es la homotecia de centro G y razón -2, entonces $h(A_1) = A$ y $h(D) = H$, luego $\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{DA_1}$. Sean σ la simetría de eje BC y τ la traslación de vector $\overrightarrow{HA}$, y consideremos la composición $\sigma' = \tau\sigma$. Entonces σ' es la simetría de eje $BC + (1/2)\overrightarrow{HA}$, que es la paralela a BC por D. Esta simetría transforma la circunferencia circunscrita en ella misma, pues su eje pasa por el centro, luego $\sigma'(A'') = A$. Así, $\sigma(A'') = \tau^{-1}(A) = H$, lo que prueba el resultado.

Otro elemento notable de un triángulo es el *incentro* , centro de la circunferencia inscrita, que vamos a describir a continuación.

Lema 6.3.6.– *Sean r_0, r_1 dos semirrectas de origen común A no contenidas en la misma recta, $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1$ los vectores unitarios sobre r_0, r_1, respectivamente. El lugar geométrico de los puntos de la región angular $[r_0 \cup r_1]$ que equidistan de las rectas que contienen a r_0, r_1 es el rayo interior*

$$t = A + \{\lambda(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1) \mid \lambda \geq 0\},$$

al que se llama la bisectriz *de la región angular. Por abuso de lenguaje, diremos que el rayo t es la bisectriz del ángulo $(\widehat{r_0, r_1})$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $P = A + \lambda\mathbf{u}_0 + \mu\mathbf{u}_1$ un punto de la región angular. La perpendicular por P a la recta que contiene a r_0 es

$$A + \lambda\mathbf{u}_0 + \mu\mathbf{u}_1 + < (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 >,$$

y su punto de corte con r_0 es $P_0 = A + [\lambda + \mu(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1)]\mathbf{u}_0$. Así

$$\overrightarrow{P_0P} = \mu[-(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1].$$

Haciendo lo propio con la otra recta obtenemos un punto similar P_1 tal que

$$\overrightarrow{P_1P} = \lambda[\mathbf{u}_0 - (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1].$$

Así $|\overrightarrow{P_0P}| = |\overrightarrow{P_1P}|$ si y sólo si $\lambda = \mu$, de donde el resultado.

Teorema 6.3.7.– *Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo concurren en un punto I interior al triángulo, que es centro de una circunferencia tangente a los tres lados, y que se llama* circunferencia inscrita *en el triángulo. Si I_A (resp. I_B, I_C) es el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\widehat{A}$ (resp $\widehat{B}, \widehat{C}$) con $\overline{BC}$ (resp. $\overline{AC}, \overline{AB}$), es*

$$\frac{\overline{BI_A}}{c} = \frac{\overline{CI_A}}{b},$$

y análogas relaciones para los otros puntos. Al punto I se le llama incentro *del triángulo.*

Demostración: El punto I_A es de la forma $I_A = A + \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})$, siendo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores unitarios sobre las semirrectas r_{AB} y r_{AC} respectivamente, esto es, $\mathbf{u} = \frac{1}{c}\overrightarrow{AB}$ y $\mathbf{v} = \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$, luego,

$$I_A = A + \lambda\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right)$$

y para que I_A pertenezca a BC, se deduce expresando $\overrightarrow{BI_A} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI_A}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ que tiene que ser $(\lambda/c) + (\lambda/b) = 1$, de donde $\lambda = bc/(b+c)$. Así,

$$I_A = A + \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

Análogamente, los puntos I_B, I_C vienen dados por:

$$I_B = B + \frac{a}{a+c}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+c}\overrightarrow{BC},$$

$$I_C = C + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CB},$$

y se comprueba que el punto I dado por:

$$I = A + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

$$I = B + \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{BC}$$

$$I = C + \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{CB}$$

pertenece a las rectas AI_A, BI_B, CI_C, ya que

$$\overrightarrow{AI_A} = \frac{a+b+c}{b+c}\overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{BI_B} = \frac{a+b+c}{a+c}\overrightarrow{BI}$$

$$\overrightarrow{CI_C} = \frac{a+b+c}{a+b}\overrightarrow{CI}$$

De otro lado:

$$b\overrightarrow{I_AB} + c\overrightarrow{I_AC} = 0$$

de donde

$$\frac{\overline{BI_A}}{c} = \frac{\overline{CI_A}}{b},$$

lo que prueba el teorema.

Proposición 6.3.8.– Teorema de las medianas. *En el triángulo ABC sea A' el punto medio de $\overline{BC}$ y $m_A = \overline{AA'}$ la mediana relativa al lado BC. Entonces*

$$m_A = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

DEMOSTRACIÓN: De $a^2 = b^2 + c^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ y de $\vec{AA'} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ se deduce que

$$m_A^2 = \vec{AA'}^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}) =$$

$$= \frac{1}{4}(c^2 + b^2 + b^2 + c^2 - a^2) = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Esto prueba la proposición.

6.4 Áreas

Lema 6.4.1.– *El área de un triángulo es igual a la mitad de la longitud de uno de sus lados por la longitud de la altura relativa a él.*

DEMOSTRACIÓN: Sea ABC el triángulo. Consideramos la paralela a BC que pasa por A y tomamos los pies de las perpendiculares a esta recta desde B y C. Obtenemos los puntos B' y C' respectivamente.

Probaremos que la superficie del triángulo ABC, $S(ABC)$, es la mitad de la del rectángulo $BCC'B'$, $S(BCC'B')$. Esto prueba el resultado.

Sea A' el pie de la perpendicular a BC desde A.

Si A' está en el segmento BC, los triángulos $BA'A$ y CAA' son iguales a BAB' y CAC' respectivamente (son iguales sus lados). Por tanto,

$$S(BCC'B') = S(BA'A) + S(BAB') + S(A'CA) + S(CC'A) =$$

$$2S(BA'A) + 2S(A'CA) = 2S(BCA).$$

Si A' no está en el segmento BC, supongamos para fijar orientación que B está en el segmento $A'C$. Tendremos

$$S(AA'CC') = S(AA'BB') + S(B'BCC') =$$

$$S(AA'B) + S(ABB') + S(B'BCC') = 2S(AA'B) + S(B'BCC').$$

Por otra parte,

$$S(AA'CC') = S(AA'C) + S(ACC') = 2S(AA'C) = 2(S(AA'B) + S(ABC)).$$

Simplificando obtenemos

$$S(B'BCC') = 2S(ABC).$$

En el caso límite en que A' sea B ó C, la descomposición de áreas es evidente.

Corolario 6.4.2.– *El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido.*

DEMOSTRACIÓN: Es inmediata del lema anterior.

Proposición 6.4.3.– *(ÁREA DE UN TRIÁNGULO) Si $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ son tres puntos no alineados, el área del triángulo ABC es*

$$S(ABC) = \frac{1}{2}\left| det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \right|.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el lema anterior sabemos que $S(ABC) = \frac{1}{2}|\vec{BC}|d(A, \overline{BC})$.

Se tiene que $\vec{BC} = (c_1 - b_1, c_2 - b_2)$, y el lado $\overline{BC}$ tiene por ecuación

$$\overline{BC} : \frac{x - b_1}{c_1 - b_1} = \frac{y - b_2}{c_2 - b_2},$$

es decir

$$\overline{BC} : (c_2 - b_2)x - (c_1 - b_1)y = b_1c_2 - b_2c_1.$$

Usando la ecuación normal de esta recta obtenemos

$$d(A, \overline{BC}) = \frac{|(c_2 - b_2)a_1 - (c_1 - b_1)a_2 - b_1c_2 + b_2c_1|}{\sqrt{(c_2 - b_2)^2 + (c_1 - b_1)^2}}.$$

Luego,

$$S(ABC) = \frac{1}{2}|(c_2 - b_2)a_1 - (c_1 - b_1)a_2 - b_1c_2 + b_2c_1| =$$

$$\frac{1}{2}\left| det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Teorema 6.4.4.– TEOREMA DEL SENO. *Sea ABC un triángulo cualquiera, S su área; se verifica*

$$\frac{a}{sen\widehat{A}} = \frac{b}{sen\widehat{B}} = \frac{c}{sen\widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

DEMOSTRACIÓN: Las primeras igualdades son inmediatas a partir de 6.4.2. La última igualdad sigue de la propiedad de **arco capaz** de la circunferencia 6.2.3:

Basta probar que $sen\hat{A} = \frac{a}{2R}$. Sea D el circuncentro.

Si D está en $\overline{BC}$, por arco capaz, $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$. Por tanto, $sen\hat{A} = sen\frac{\pi}{2} = 1 = \frac{a}{2R}$, pues $a = 2R$.

Si D no está en $\overline{BC}$, sea $\hat{D}$ el ángulo en D del triángulo isósceles BCD. Tomando la altura desde D formamos un triángulo rectángulo de hipotenusa R, cateto opuesto a $\frac{\hat{D}}{2}$ igual a $\frac{a}{2}$. Por tanto, $sen\frac{\hat{D}}{2} = \frac{a}{2R}$.

En el caso en que A y D están en el mismo semiplano determinado por $\overline{BC}$, $\hat{D} = 2\hat{A}$, luego $sen\frac{\hat{D}}{2} = sen\hat{A}$.

Ahora bien, si D y A están en distintos semiplanos determinados por $\overline{BC}$, $\hat{D} = 2\pi - 2\hat{A}$. Por tanto, $\frac{\hat{D}}{2} = \pi - \hat{A}$ y $sen\frac{\hat{D}}{2} = sen\hat{A}$.

Otras fórmulas del área de un triángulo están contenidas en las dos proposiciones siguientes.

Proposición 6.4.5.– *Se verifica que*

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{sen\widehat{B}sen\widehat{C}}{sen(\widehat{B} + \widehat{C})}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se tiene que

$$S = \frac{bcsen\widehat{A}}{2} = \frac{\frac{asen\widehat{B}}{sen\widehat{A}} \cdot \frac{asen\widehat{C}}{sen\widehat{A}} \cdot sen\widehat{A}}{2} =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{sen\widehat{B}sen\widehat{C}}{sen\widehat{A}} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{sen\widehat{B}sen\widehat{C}}{sen(\pi - (\widehat{B} + \widehat{C}))} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{sen\widehat{B}sen\widehat{C}}{sen(\widehat{B} + \widehat{C})}.$$

Proposición 6.4.6.– FÓRMULA DE HERÓN. *Si $p = (a + b + c)/2$ es el semiperímetro del triángulo, se verifica que*

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se tiene que

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\ ,\ sen\widehat{A} = \frac{2S}{bc},$$

luego

$$1 = \cos^2 \widehat{A} + sen^2 \widehat{A} = \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} + \frac{4S^2}{b^2c^2} =$$

$$= \frac{16S^2 + (b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2},$$

de donde

$$16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = (2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2) =$$

$$= [(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2] = (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c),$$

y así

$$S^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

lo que prueba la proposición.

6.5 Ejercicios

Ejercicio 1.–El baricentro G de un triángulo ABC está situado sobre la recta $y = 0$. Dos de sus vértices son $A = (2, -3)$, $B = (-5, 1)$. El vértice C está sobre la recta $x = 0$. Hallar G y C.

Ejercicio 2.–De un triángulo ABC se conoce $AB : 5x - 3y + 2 = 0$, la altura relativa a A: $4x - 3y + 1 = 0$, y la altura relativa a B: $7x + 2y - 22 = 0$. Hallar los vértices.

Ejercicio 3.–De un triángulo ABC se conoce: $A = (1, 3)$, y las ecuaciones de dos medianas: $x - 2y + 1 = 0$, $y - 1 = 0$. Hallar los vértices.

Ejercicio 4.–De un triángulo ABC se conoce: $B = (2, -7)$, y las ecuaciones de la altura $3x + y + 11 = 0$ y de la mediana $x + 2y + 7 = 0$ trazadas desde diferentes vértices. Hallar los vértices.

Ejercicio 5.–De un triángulo ABC se conoce: $C = (4, 3)$, y las ecuaciones de la bisectriz $x + 2y - 5 = 0$ y de la mediana $4x + 13y - 10 = 0$ trazadas desde un vértice. Hallar los vértices.

Ejercicio 6.–De un triángulo ABC se conoce: $A = (3, -1)$, y las ecuaciones de la bisectriz $x - 4y + 10 = 0$ y de la mediana $6x + 10y - 59 = 0$ trazadas desde diferentes vértices. Hallar los vértices.

Ejercicio 7.–De un triángulo ABC se conoce:
-) el lado AB que es la recta $x + y - 2 = 0$,
-) que está contenido en el semiplano de borde AB que contiene al origen,
-) el pie de la altura relativa al vértice C, que es el punto $P = (-1, 3)$, y la longitud de dicha altura que es $\sqrt{8}$,
-) la longitud de la mediana que pasa por C, que es 4,
-) el punto de corte de la bisectriz interior del ángulo en C, que es el punto $Q = (0, 2)$.
Hallar los vértices.

Ejercicio 8.–Los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ de un triángulo valen 75^{o} y 35^{o} respectivamente. Hallar
a) los ángulos formados por cada dos alturas,
b) los ángulos formados por cada dos bisectrices.

Ejercicio 9.–En un triángulo los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ valen 60^{o} y 20^{o}. Hallar el ángulo que forman la altura y la bisectriz trazadas desde el vértice A.

Ejercicio 10.–En un triángulo rectángulo en A, el ángulo $\widehat{B}$ mide $\pi/5$. Hallar
a) los ángulos que forma la altura relativa a la hipotenusa con cada cateto;
b) los ángulos que forman con la hipotenusa la mediana y la bisectriz que parten del vértice A.

Ejercicio 11.–Demostrar que el ángulo que forma la mediana con la altura de un triángulo rectángulo en A, trazadas ambas desde el vértice A, es igual a $\widehat{B} - \widehat{C}$.

Ejercicio 12.–Demostrar que en un triángulo ABC, el ángulo que forman las bisectrices de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ es igual a un ángulo recto más $\widehat{A}/2$.

Ejercicio 13.–Probar que si una recta pasa por un vértice de un triángulo y por el punto medio de una mediana relativa a otro vértice, entonces divide al lado opuesto en dos segmentos que son el uno duplo del otro.

Ejercicio 14.–Se dan las rectas

$$r_1 : x + y - 2 = 0$$
$$r_2 : x + 2y - 3 = 0$$
$$r_3 : 3x + y - 4 = 0$$
$$r_4 : -x + y - 1 = 0$$
$$r_5 : -x + y - 3 = 0.$$

Se pide:
1.- Hallar los vértices A, B, C de un triángulo sabiendo que el radio de la circunferencia circunscrita es 2 y que r_1 es la mediatriz de $\overline{AB}$, r_2 es la mediatriz de $\overline{BC}$, y r_3 la de $\overline{CA}$. ¿Cuántas soluciones hay?. Hallarlas todas.
2.- Hallar los vértices B, C de un triángulo equilátero, sabiendo que $A = (1, 1)$, que B está sobre r_4 y que C está sobre r_5. ¿Cuántas soluciones hay?. Hallarlas todas.

Ejercicio 15.–Hallar los vértices de un triángulo ABC, sabiendo que el lado AB está sobre la recta $x + y = 1$, el punto medio de $\overline{AB}$ es $(3, -2)$, la altura correspondiente a dicho lado mide $3/\sqrt{2}$ y la bisectriz interior que pasa por C es $x = 2$.